23/12/2010

Διαφορική Γεωμετρία

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι επιφάνειες με $K=0$

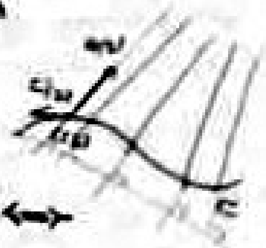
Θεώρημα: Αν S είναι κανονική επιφάνεια με $K=0$ χωρίς επίπεδα σημεία, τότε είναι αναπτυκτή

Ερώτημα: Ποιες είναι οι αναπτυκτές επιφάνειες;

① κυλινδρικές, ② κωνικές ③ επιφάνειες εφαπτομένων [illegible]

Παρατήρηση: Κάθε ευθειογενής επιφάνεια δύναται να παραμετρηθεί ως εξής:

(*) $X(u,v)=c(u)+v\,w(u)$, $c: I\to S$ επιφανειακή καμπύλη, $w: I\to\mathbb{R}^3$ λεία, $\|w\|=1$, $c'\wedge w\neq 0$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Η ευθειογενής επιφάνεια (*) είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ $[c', w, w']=0$

$[c', w, w']=0 \Leftrightarrow w'(u)=a(u)c'(u)+b(u)w(u)$ όπου $a(u), b(u)$ συναρτήσεις

$\langle w(u), w(u)\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle w(u), w'(u)\rangle = 0$

$\langle w'(u), w(u)\rangle = a(u)\langle c'(u), w(u)\rangle + b(u)\langle w(u), w(u)\rangle$

$0 = a(u)\langle c'(u), w(u)\rangle + b(u)$ (1)

Μπορώ να υποθέσω ότι η c τέμνει τις γενέτειρες υπό ορθή γωνία δηλαδή,

$\boxed{\langle c'(u), w(u)\rangle = 0}$ (2)

(1) $\xrightarrow{(2)}$ $\boxed{b(u)=0}$

Η επιφάνεια είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ $\boxed{w'(u)=a(u)c'(u)}$ (**)

① $a(u)=0 \quad \forall u\in I_0$ = διάστημα

Τότε η (**) δίνει $w(u)=w$ = σταθερό

$\langle c'(u), w\rangle = 0 \Rightarrow (\langle c(u), w\rangle)' = 0 \Rightarrow \langle c(u), w\rangle$ = σταθ

$\Rightarrow$ Η c περιέχεται σε επίπεδο $\Pi \perp w$

$X(u,v)=c(u)+vw$

Η επιφάνεια είναι τότε κυλινδρική επιφάνεια με καμπύλη οδηγό την c.

(2) $a(u) = a =$ <u>σταθερά</u> $\neq 0 \ \forall u \in I_0$

$(**) \iff (w(u) - ac(u))' = 0$

$\Rightarrow w(u) - ac(u) = p_0 =$ σταθερό σημ.

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} w(u) = ac(u) + p_0 \\ X(u,v) = c(u) + vw(u) \end{array}\right\} \Rightarrow$ η επιφάνεια είναι κωνική με οδηγό την c και κορυφή $X(u, -\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a}p_0$

$X(u,v) = c(u) + vac(u) + vp_0$

$= (1+va)c(u) + vp_0$

(3) Έστω $a(u) \neq 0$ και $a'(u) \neq 0 \ \forall u \in I_0$

$X(u, -\frac{1}{a(u)}) = c(u) - \frac{1}{a(u)}w(u)$

Θεωρώ την καμπύλη $\tilde{c}: I_0 \to S$ με $\tilde{c}(u) = c(u) - \frac{1}{a(u)}w(u)$

$\left.\begin{array}{l} X_u(u,v) = c'(u) + vw'(u) = c'(u) + va(u)c'(u) = (1+va(u))c'(u) \\ X_v = w(u) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ κατά μήκος της $\tilde{c}$ η X δεν είναι κανονική

Η $\tilde{c}$ έχει διάνυσμα ταχύτητας

$\tilde{c}'(u) = c'(u) + \frac{a'(u)}{a^2(u)}w(u) - \frac{1}{a(u)}w'(u)$

$= c'(u) + \frac{a'(u)}{a^2(u)}w(u) - \frac{1}{a(u)}a(u)w(u)$

$\Rightarrow \tilde{c}'(u) = \frac{a'(u)}{a^2(u)}w(u) \neq 0 \Rightarrow \tilde{c}$ είναι κανονική

$\Rightarrow$ οι εφαπτόμενες ευθείες της $\tilde{c}$ είναι οι γενέτειρες

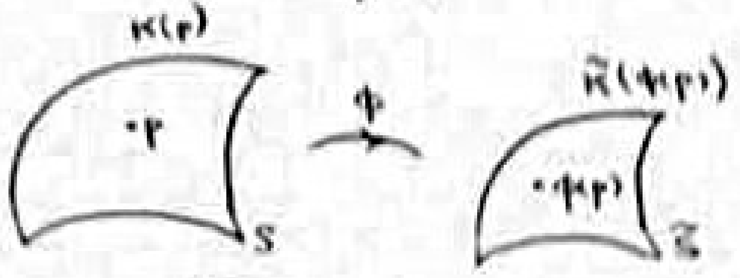
$\Rightarrow$ η επιφάνεια είναι επιφάνεια εφαπτομένων της $\tilde{c}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια είναι <u>τοπικά</u> κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα $K=0$ παντού χωρίς επίπεδα σημεία είναι τοπικά κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων

ΠΟΡΙΣΜΑ (Έξοχο Θεώρημα)

Τοπικά ισομετρικές επιφάνειες έχουν την ίδια καμπυλότητα Gauss στα αντίστοιχα σημεία.



$$\boxed{\tilde{K}(\varphi(p))=K(p)}$$

Κάθε επιφάνεια τοπικά ισομετρική με το επίπεδο έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$.

Ερώτημα: Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο;

<u>Απάντηση</u>: Έστω S επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ χωρίς επίπεδα σημεία. Τότε η S τοπικά είναι κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτομένων. Δηλαδή τοπικά παραμετρίζεται ως εξής

$$X(u,v)=c(u)+v\,w(u) \,, \qquad \|w(u)\|=1,\ \langle c'(u),w(u)\rangle=0$$
$$w'(u)=a(u)c'(u), \quad u = \text{μήκος τόξου της } c.$$

$X_u(u,v) = c'(u)+v\,w'(u) = c'(u)+v\,a(u)c'(u) = (1+v\,a(u))\,c'(u)$

$X_u(u,v) = (1+v\,a(u))c'(u), \quad X_v(u,v)=w(u)$

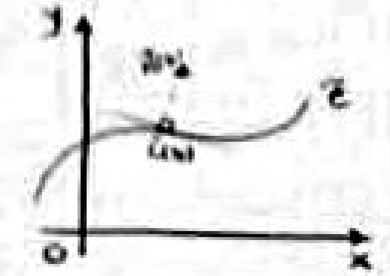
Τα θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης είναι

$E(u,v) = \langle X_u(u,v), X_u(u,v)\rangle = (1+v\,a(u))^2>0$

$F(u,v) = \langle X_u(u,v), X_v(u,v)\rangle = \langle (1+v\,a(u))c'(u), w(u)\rangle$

$\Rightarrow \boxed{F(u,v)=0} \quad \boxed{E(u,v)=(1+v\,a(u))^2} \quad \boxed{G(u,v)=1}$

$G(u,v) = \langle X_v(u,v), X_v(u,v)\rangle = \langle n(u), n(u)\rangle = +1$



Εστω $c: I \to \mathbb{R}^2 \equiv Oxy$ επιπεδο με παραμετρο το μηκος τοξου u, καμπυλοτητα $\kappa(u)$ και πλαισιο Frenet $\{\vec{t}(u), \vec{n}(u)\}$

$$\dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}\ ,\quad \dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t}$$

Παραμετρώ το επιπεδο τοπικά ως εξής

$$\tilde{X}(u,v) = \vec{c}(u) + v\vec{n}(u)$$

$$\tilde{X}_u(u,v) = \dot{\vec{c}}(u) + v\dot{\vec{n}}(u) = \vec{t}(u) - v\kappa(u)\vec{t}(u)$$

$$\boxed{\tilde{X}_u(u,v) = (1 - v\kappa(u))\,\vec{t}(u)}$$

$$\boxed{\tilde{X}_v(u,v) = \vec{n}(u)}$$

$$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v(u,v) = (1 - v\kappa(u))\,\underbrace{\vec{t}(u) \times \vec{n}(u)}_{\neq 0}$$

Η πρώτη Θεμελιώδης μορφή του επιπέδου $Oxy \equiv \mathbb{R}^2$ είναι

$$\tilde{E}(u,v) = \langle \tilde{X}_u(u,v), \tilde{X}_u(u,v)\rangle = (1 - v\kappa(u))^2$$

$$\tilde{F}(u,v) = \langle \tilde{X}_u(u,v), \tilde{X}_v(u,v)\rangle = 0$$

$$\tilde{G}(u,v) = \langle \tilde{X}_v(u,v), \tilde{X}_v(u,v)\rangle = +1$$

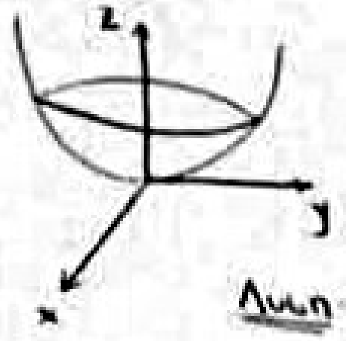
$K=0$ Ευκλειδεια Γεωμ.
$K>0$ Σφαιρική Γεωμετρία
$K<0$ Παραβολική Γεωμετρία

Επιλεγω την $\tilde{c}$ έτσι ωστε $\kappa(u) = -a(u)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Καθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ παντού χωρίς ισοπεδα σημεία είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο

[ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ]

ΑΣΚΗΣΗ Έστω S η επιφάνεια με εξίσωση $z=x^2+y^2$.



Υπάρχουν ομφαλικά σημεία; Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας. Υπάρχει σύστημα γραμμών καμπυλότητας και αν ναι βρείτε το.

<u>Λύση</u> Η S είναι κανονική ως γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$h(x,y)=x^2+y^2$ με σύστημα συντεταγμένων $X: \mathbb{R}^2 \to S$.

$$X(x,y)=(x,y,h(x,y))=(x,y,x^2+y^2)$$

$$X_x(x,y)=(1,0,2x), \quad X_{xx}(x,y)=(0,0,2), \quad X_{xy}(x,y)=(0,0,0)$$
$$X_y(x,y)=(0,1,2y), \quad X_{yy}(x,y)=(0,0,2)$$

$$E(x,y)=\langle X_x(x,y), X_z(x,y)\rangle = 1+4x^2$$
$$F(x,y)=\langle X_x(x,y), X_y(x,y)\rangle = 4xy$$
$$G(x,y)=\langle X_y(x,y), X_y(x,y)\rangle = 1+4y^2$$

Το μοναδιαίο κάθετο είναι $N(x,y)=\dfrac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$

$$X_x \times X_y(x,y) = \begin{vmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x,-2y,1)$$

$$N(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2x,-2y,1)$$

$$e(x,y)=\langle X_{xx}(x,y), N(x,y)\rangle = \frac{2}{\sqrt{}}$$

$$f(x,y)=\langle X_{xy}(x,y), N(x,y)\rangle = 0$$

$$g(x,y)=\langle X_{yy}(x,y), N(x,y)\rangle = \frac{2}{\sqrt{}}$$

Το $X(x,y)$ ειναι ομφαλικό $\Leftrightarrow$

$$\frac{e(x,y)}{E(x,y)} = \frac{f(x,y)}{F(x,y)} = \frac{g(x,y)}{G(x,y)} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e(x,y) = \lambda E(x,y) \\ f(x,y) = \lambda F(x,y) \\ g(x,y) = \lambda G(x,y) \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ \text{και} \\ \frac{2}{1+4x^2} = \frac{2}{1+4y^2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{ή} \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Το μονο ομφαλικο σημειο ειναι το $X(0,0) = (0,0,0)$

Η καμπυλη $c(t) = X(x(t), y(t))$ ειναι γραμμή καμπυλότητας $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y'^2 & -x'y' & x'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (y')^2 & -x'y' & (x')^2 \\ 1+4x^2 & 4xy & 1+4y^2 \\ \frac{2}{\sqrt{}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{}} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x'y' \begin{vmatrix} 1+4x^2 & 1+4y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4xy \begin{vmatrix} (y')^2 & (x')^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x'y'(x^2-y^2) - xy((y')^2-(x')^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy(x')^2 + x'y'(x^2-y^2) - xy(y')^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + (x^2-y^2)\frac{x'}{y'} - xy = 0 \\ \text{ή} \\ xy\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + (x \quad\quad) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2+y^2)^2$$

παντοτε υπαρχουν γραμμες καμπυλοτητας

$$\frac{x'}{y'} = \frac{-(x^2-y^2)\pm(x^2+y^2)}{2xy}$$

κάπου έχει ένα λάθος

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{-x^2+y^2+x^2+y^2}{2xy} \\[2ex] \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{-x^2+y^2-x^2-y^2}{2xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x'}{y'} = -\dfrac{y}{x} \\[2ex] \dfrac{x'}{y'} = +\dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Η $c(t) = X(x(t), y(t))$ είναι γραμμή καμπυλότητας

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{x'}{y'} = -\frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} \right.$$

$$\Leftrightarrow \{ xx' + yy' = 0 \quad \text{ή} \quad yx' - xy' = 0$$

$$\Leftrightarrow \{ (x^2+y^2)' = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{x}{y}\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(t) + y^2(t) = c_1 = \text{σταθ} \quad \text{ή} \quad y(t) = c_2 x(t), \quad c_2 = \text{σταθ}.$$

$$c(t) = X(x(t), y(t)) = (x(t), y(t), x^2(t) + y^2(t))$$

$$= (x(t), y(t), c_1) \quad \text{κύκλοι}$$

$y = c_2 x$

παραβολές

Θα μπορούσα κατευθείαν να δω ότι είναι εκ περιστροφής επιφάνεια και να μην κάνω καμία πράξη

Δεν υπάρχει σύστημα γραμμών καμπυλότητας

Το νέο σύστημα είναι
θα είναι
$u = x^2+y^2$, $\frac{x}{y} = v$
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$$
$Y(u,v) = X(u^2+y^2)$

[ΑΣΚΗΣΗ] Δίνεται η επιφάνεια $S: z = xy$. Είναι ευθειογενής; Είναι αναπ

Λύση: Η S είναι κανονική ως γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = xy$

$$X(u,v) = (u, v, uv) = (u,0,0) + (0, v, uv) =$$
$$= (u,0,0) + v(0,1,u) = c(u) + v\,w(u)$$

$c(u) = (u,0,0)$
$w(u) = (0,1,u) \neq 0$.

Αν δεν μπορώ να γράψω την παραμ. παραστ. δεν σημαίνει ότι δεν είναι ευθειογενής. Θα πρέπει να βρω τις ασυμπτωτικές [illegible] ...

$$= (0,0,0) + (u,0,uv)$$
$$= (0,v,0) + u(1,0,v)$$ διπλά ευθειογενής.

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)}$$

$h(u,v) = uv$
$h_u = v \quad h_{uu} = 0$
$h_v = u \quad h_{vv} = 0$
$h_{uv} = 1$

$K(u,v) = \underline{-1} < 0 \Longrightarrow$

ΔΕΝ είναι αναπτυκτή.